LOGARITHMO-TECHNIA:

SIVE

Methodus conſtruendi

LOGARITHMOS

Nova, accurata, & facilis;

SCRIPTO

Antehàc Communicata, Anno Sc. 1667.

Nonis *Auguſti*: Cui nunc accedit.

Vera Quadratura Hyperbolæ,

&

Inventio *Summæ* Logarithmorum.

BIBLIOTECA

AUCTORE *NICOLAO MERCATORE*

Holſato, è Societate Regia.

HUIC ETIAM JUNGITUR

MICHAELIS ANGELI RICCII Exercitatio

Geometrica de Maximis & Minimis; hîc ob Argumenti præſtantiam & Exemplarium raritatem recuſa.

LONDINI,

Typis *Guilielmi Godbid*, & Impenſis *Moſis Pitt* Bibliopolæ, in vico vulgò vocato *Little Britain*. Anno M. DC. LXVIII.

LOGARITHMOTECHNIA.

BIBLIOTHECA BODLEIANA

LOGARITHMUS compoſito vocabulo dicitur à ratione & numero, quaſi rationum numerus; id quod planè cum re conſentit. Eſt enim Logarithmus nihil aliud, quam numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam abſolutus quiſque ad unitatem obtinet. In qua definitione rationes accipimus, tanquam magnitudines partibus conſtantes homogeneis toti; ſtrictiori aliquantò notione, quàm vulgò ſolet. Quamvis enim ratum ſit, rationem omnem ex comparatione quantitatum homogenearum oriri: certè nec quævis comparatio producit rationem; nec quarumvis quantitatum, homogenearum licèt, habitudo eſt ratio quanta, ſeu partibus conſtans. Nam æqualitatis, quæ dicitur, ratio, eſt illa quidem quantitatum homogenearum, atque æqualium, habitudo mutua, unde nec rationis appellatione privandam autumem, cui definitio *Euclidea* competit non minus ac aliis rationibus, quas inæqualitatis vocant: ſed nihil obſtat, quò minus generalem iſtam rationis notionem porrò dividamus ita, ut quantitatem habere putentur ſolæ rationes, ex inæqualium habitudine ortæ; at æqualitatis ratio in indiviſibili conſiſtat, habeatque ſe in rationibus, quemadmodum punctum in magnitudinibus, aut nullitas in numeris, quæ ſingula quantitate ac partibus carent. Componas enim ſexcentas rationes æqualitatis, non augetur nec minuitur ratio, ſed eadem manet æqualitas: ſecus atque in rationibus inæqualitatis, quæ additæ vel detractæ invicem, faciunt rationem majorem vel minorem. Quantum autem eſt, quod additis vel demtis partibus homogeneis augetur minuiturve. Sed nec quævis comparatio quantitatum homogenearum rationem producit. Veluti cùm numerum dividimus per numerum, comparantur utique quantitates homogeneæ, ſpectando quoties altera contineatur in altera; ſed quod inde oritur latus, nec ratio eſt ipſorum numerorum, nec ſanè quantitatem exprimit rationis, quæ utriſque intercedit. Alioquin diviſo numero quovis per æqualem, quæ inde oritur unitas, exprimeret quantitatem rationis æqualium, quam tamen quantitate carere ſuprà adſtruximus. Quinimò, datis pluribus rationibus, *v. gr.* 4 *ad* 2, & 9 *ad* 3, ſi diviſo utriuſque antecedente per

 ſuum

[Title printed on sig. F5]

ſuum conſequentem, exhiberent orti 2 & 3 veram quantitatem iſtarum rationum; oporteret, ut ex his ortis compoſitus numerus, nimirum 5, exhiberet quoque veram quantitatem rationis compoſitæ. Atqui ratio compoſita eſt 3 6 *ad* 6, cujus quantitatem jam exprimeret ortus 6, diverſus ſanè ab iſto 5. Obtinuit tamen uſus, ut rationes denominentur à latere orto; ſic ratio 4 ad 2 dicitur dupla, & 9 ad 3 tripla: verùm hæc nomina arbitrio hominum impoſita; retineri quidem poſſunt, veritati autem derogare nullo modo debent. Quanquam nec utilitate caret iſte modus denominandi rationes; ſiquidem arguit, rationes eſſe majores, quarum denominator eſt major, & contrà: eodem modo ſinus majores congruunt majoribus arcubus, quorum tamen veram quantitatem exprimere nemini videntur. Cæterùm, ut linea eſt dupla lineæ, quam bis continet; ita, propriè loquendo, dupla foret ratio alterius rationis, quam bis continet; ſed pro eo duplicatam dicere maluerunt Scriptores, quorum arbitrio ſynonyma alioquin vocabula *dupli* & *duplicati*, res planè diverſas ſignificare intelliguntur. Verùm id quod eſt multò maximum; nimirum omnium quantitatum menſuram eſſe quantitatem homogeneam, & in diviſione genuina fieri applicationem menſuræ homogeneæ ad quantitatem menſurandam, ortum vero ex tali applicatione, nihil aliud eſſe, quàm numerum Arithmeticum, exprimentem, quoties menſura continetur in menſurato; hoc ſcilicet eſt, quod omnem dubitationem excludit. Ita falluntur profectò, qui applicatâ lineâ rectâ illatabili ad aream datam, putant inveniri latitudinem rectanguli; quaſi non potiùs ſecundum veras diviſionis leges applicaretur rectangulum æquè longum diviſori, & æquè latum unitati aſſumtæ, ad aream extenſam quoque ad longitudinem diviſoris; & quaſi non ortus ex iſta applicatione, numerus eſſet Arithmeticus, exprimens, quoties rectangulum menſurans contineatur in menſurato, vel (cùm per 1. VI eadem ſit ratio) quoties latitudo rectanguli applicati contineatur in latitudine rectanguli menſurati, quò ſcilicet diviſio verè opponatur multiplicationi, quæ reſolvat hujus productum in ſua elementa. Quemadmodum enim omnis multiplicator eſt numerus Arithmeticus (ut habet *Stevinus* in Arithmetica Practica;) ita omnis ortus à diviſione eſt ſimiliter numerus Arithmeticus. Quæ quidem omnia facillimè præſenti negotio aptantur. Nam multiplicare rationem nihil eſt aliud, quàm replicare aliquam rationem toties, quot ſunt unitates in numero aliquo Arithmetico, qui dicitur factor. Et dividere rationem, eſt applicare rationem aliquam ad aliam rationem, ut inveniatur numerus Arithmeticus, exprimens, quoties menſurans ratio contineatur in menſurata. Id ſi hîc fieret, nihil dubium, quin vera patefieret rationis quantitas. At enimverò, cùm applicatur terminus alicujus rationis ad alterum; num putamus rationem applicari

plicari ad rationem? quo pacto igitur ortus ex tali applicatione poteſt exprimere quantitatem datæ rationis? Verum eſt quidem, quòd ortus ex applicatione termini ad terminum, rationem habet ad unitatem eandem, quam dividuus ad diviſorem; ſed hoc modo eadem prodit ratio, quæ ante diviſionem fuerat, aliis tantum terminis expreſſa; nec proinde quantitas rationis datæ invenitur in menſura aliqua prius nota, quemadmodum in aliis magnitudinibus diviſis aſſolet, & inſtituti noſtri ratio poſtulat: Siquidem tum demum quantitatem rationum exactè determinâſſe videbimur, cùm eas omnes in una aliqua ac eâdem communi menſurâ æſtimare noverimus; id quod Logarithmorum ope præſtari, definitione modò tradità innuere volui. Ex qua porrò intelligitur, cùm ſinguli Logarithmi numerent particulas rationum inde ab unitate ad ſingulos ordine abſolutos procedendo coacervatarum; fieri non poſſe, quin æqualibus Logarithmorum differentiis (id eſt, æqualibus particularum incrementis) congruant quoque æquales rationes abſolutis intercedentes (cùm integra ex æquali numero particularum æqualium conflata, inter ſe ſint æqualia;) adeoque Logarithmos eſſe in proportione Arithmetica, cùm eorum abſoluti ſunt in Geometrica; idcircò poſſe operationem Regulæ proportionum in compendium redigi, ſubſtitutâ additione & ſubtractione loco multiplicationis & diviſionis: Denique rationis cujuſque bipartitionem, tripartitionem, *&c.* quæ alioquin requireret extractionem radicis quadratæ, cubicæ, *&c.* conſiſtere in bipartitione, tripartitione, *&c.* differentiæ Logarithmorum datis terminis congruentium (hoc eſt, ratiuncularum in ratione data comprehenſarum.) Qui uſus cùm ſit eximius; patet poſtremò, quo pacto tam utiles numeri artificiales, ſeu Logarithmi concinnari poſſint; nimirum inveſtigando, quot ratiunculæ, aſſumtæ magnitudinis, contineantur in ratione cujuſque abſoluti ad *unitatem*. Sic enim unitatis Logarithmus evadit 0, cùm unitatis ad unitatem ratio ſit æqualitatis, quam quantitate carere ſupra aſſerui. Ita nimirum fiet, ut cùm inter multiplicandum vel dividendum unitas nihil mutet; hujus Logarithmus 0 (dum additio & ſubtractio ſubſtituuntur multiplicationi & diviſioni) nihil quoque additione vel detractione ſui mutet. Numerus autem ratiuncularum in ratione decupla contentarum commodiſſimè aſſumitur 1,0000000 (hoc eſt, una decupla ratio in numerum partium decimalium rotundum diſtributa.) Ita enim fiet, dum inter unitatem & 10 intercedit una ratio decupla, & porrò inter 10 & 100 altera, inter 100 & 1000 tertia, & deinceps; ut in centupla quidem ratione contineantur ratiunculæ 2,0000000 (hoc eſt, duæ decuplæ rationes in numerum partium rotundum diſtributæ) in millecupla verò ratione contineantur 3,0000000 (hoc eſt, tres rationes decuplæ in numerum par-

tium rotundum diſtributæ;) & deinceps. Unde primùm hoc commodi conſequimur, ut abſolutis, iiſdem characteribus expreſſis, iidem competant Logarithmi; veluti ſi abſoluto 2 competat Logarithmus 0,30102999; etiam abſolutis 20, 200, 2000 competent Logarithmi 1,30102999; 2,30102999; 3,30102999. Etenim ſi rationes 2 ad 1, 20 ad 1, 200 ad 1, & deinceps, intelligantur partitæ, illa quidem in rationes 2 ad 1 & 1 ad 1; iſta in 20 ad 10, & 10 ad 1; hæc in 200 ad 100, & 100 ad 1; apparet, quod exceſſus 2 ad 1, quo illa ſuperat rationem 1 ad 1 æqualis ſit exceſſui 20 ad 10, quo iſta ſuperat rationem 10 ad 1, idemque æqualis exceſſui 200 ad 100, quo hæc ſuperat rationem 100 ad 1. Ergo ſi ratio 2 ad 1 præter æqualitatis rationem (quam innuit characteriſtica 0) contineat ratiunculas 30102999, qualium ipſa decupla continet 1,0000000; certè ratio 10 ad 1 præter unam decuplam (quam innuit characteriſtica 1) continebit eundem numerum ratiuncularum excurrentium 30102999; & ratio 200 ad 1 præter duas decuplas (quas innuit characteriſtica 2) continebit ſimiliter eundem numerum ratiuncularum excurrentium 30102999. Unde porrò & hoc conſequimur, ut ex inſpecta characteriſtica, uniuſcujuſque abſoluti valorem æſtimare queamus. Nam cum in decupla contineantur 1,0000000 ratiunculæ numero rotundo, & in centupla 2,0000000 ratiunculæ numero itidem rotundo; oportet, ut quæcunque ſunt inter decuplam & centuplam contineant plus quàm unam decuplam, minùs autem quam duas; quamobrem characteriſtica omnium abſolutorum, qui ſunt inter 10 & 100, ipſiuſque adeò denarii (hoc eſt, omnium numerorum, qui ſcribuntur duobus characteribus) erit 1; & ſic deinceps.

His ita ordinatis, proximum eſt, ut oſtendamus, quomodo inveniatur menſura rationis, quam quiſque abſolutus obtinet ad unitatem, in partibus, qualium decupla continet 1,0000000 (hoc eſt, quomodo cujuſque abſoluti Logarithmus inveſtigandus ſit.) Verbi gratiâ: Scire velim, ratio 100[5 ad 1 quot contineat ratiunculas, qualium decupla continet 1,0000000. Diſpeſco igitur rationem datam 100[5 ad 1 in ſuas partes, nimirum 100[5 ad 100, 100 ad 10, & 10 ad 1, quarum poſteriores duæ conſtituunt duas decuplas (unde patet Characteriſticam fore 2;) itaque reſtat, ut inveſtigemus, quota pars ſit reliqua iſta ratio 100[5 ad 100 ipſius decuplæ. Quod ſi igitur termini 100[5 & 100 ducantur uterque in ſeſe, producti exhibebunt rationem duplicatam rationis 100[5 ad 100, cujus (duplicatæ ſc. rationis) termini rurſus in ſe ducti procreabunt duplicatam duplicatæ, id eſt, quadruplicatam rationis 100[5 ad 100: atque ita continuatâ multiplicatione terminorum, donec is, qui gignitur ex ductu continuo termini 100[5 in ſeipſum, evadat decuplus ejus, quem ductus continuus

tinuus termini 100 in ſeipſum producit; denominator poteſtatis poſtremo genitæ oſtendet, quot integris vicibus ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla. Et cùm alter terminorum ſit 100, cujus poteſtates omnes conſtant unitate & certo numero cyphrarum; omnis labor reliquus occupabitur circa elevandum alterum terminum 100[5 ad eam poteſtatem, quæ prioris termini (nimirum 100rij) æquè altam poteſtatem excedat decuplo; cujus operationis compendium exemplo, quàm verbis docere præſtat.

100[5000 (1)
5001 (1)

10005000
5025

10100025 (2)
5200101 (2)

10100025
10100
20
5

10201150 (4)
0510201 (4)

10201150
20403
102
51

10407068 (8)
6070401 (8)

10830688 (16)
8603801 (16)

11730356 (32)
5303711 (32)

13760116 (64)
1106731 (64)

18934068 (128)

18934068 (128)
60439816 (128)

35849856 (256)
58948536 (256)

128521168 (512).

Hæc poteſtas pluſquam decuplo excedit poteſtatem æquè altam 100rij; ergo reſumo 256tam, eamq; duco, non in ſeſe, ut modo, ſed in proximè præcedentem, nimirum 128vam, hoc modo:

35849856 (256)
60439816 (128)

67878312 (384)
11067312 (64)

93401304 (448)
53037112 (32)

109562992 (480)

Hæc poteſtas denuò excedit æquè altam 100rij pluſquam decuplo; ergo eandem 448vam duco, non in 32dam, ut modo, ſed in proximè præcedentem, hoc modo:

93401304 (448)
86038016 (16)

101159944 (464)

Ubi rurſus nimium colligitur; ergo eandem adhuc 448vam duco, non in 16tam, ut modo, ſed in proximè præcedentem, nimirum 8vam, hoc modo:

93401304 (448)
60704016 (8)

97203296 (456)
05102016 (4)

99161936 (460)
52001016 (2)

100156032 (462)

Quæ poteſtas rurſus excedit limitem; quare eandem 460mam duco, non in 2dam, ſed in 1mam, hoc modo:

99161936 (460)
50010016 (1)

99657744 (461)

Cùm

Cùm igitur 462da poteſtas termini 100⌊5 excedat æquè altam 100ij plus quam decuplo; at 461ma ejuſdem termini 100⌊5 excedat æquè altam 100ij minùs quam decuplo : ajo, rationem 100⌊5 ad 100 contineri in decupla plus quam 461 vicibus, minùs autem quàm 462bus.

Cæterùm

Cùm poteſtas { 460, 461, 462 } ſit { 9916193, 9965774, 10015603 } & differentiæ { 49581, 49829 } propemodum æquales;

Itaque partem proportionalem, quâ poteſtas juſta, nimirum 10000000 excedit proximè minorem 9965774, per Regulam auream facilè ac turò reperire datur, ſumendo nimirum,

juſtæ	10000000
& proximè minoris	9965774
differentiam	34226, & dicendo :

Ut differentia inter proximè minorem & majorem (nimirum 49829)
Ad differentiam inter proximè minorem & juſtam (putà 34226;)

Ita 10000, ad 6868; quæ ſunt partes decimales unius vicis, adeò ut ratio 100⌊5 ad 100 contineatur in decupla 461⌊6868 vicibus. Porrò, Si decupla (ſive ratio 100⌊5 ad 100 ſumta 461⌊6868 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejuſmodi ratiunculas continebit ratio 100⌊5 ad 100 ſemel ſumta? Prodeunt 21659⌊7 ratiunculæ, quæ ſunt exacta menſura rationis 100⌊5 ad 100, quibus ſi addas rationes 100 ad 10, & 10 ad 1, hoc eſt bis decuplam, conſtantem ratiunculis 2,0000000, fit integra menſura rationis 100⌊5 ad 1 (ſive Logarithmus abſoluti 100⌊5) hic ſcilicet 2, 0021659⌊7.

Pari modo invenietur Logarithmus abſoluti 99⌊5, vel ratio abſoluti 99⌊5 ad 1, ſi ex ratione 100 ad 1 (quæ æquipollet bis decuplæ) auferas rationem 100 ad 99⌊5, hoc eſt, ex ratiunculis 2,0000000 auferas numerum ſimilium ratiuncularum in ratione 100 ad 99⌊5 contentarum. Quæratur igitur primùm, quoties ratio 100 ad 99⌊5 contineatur in decupla. Ubi rurſus alter terminorum cùm ſit 100, operationis haut indiget; alter verò 99⌊5 continuo ductu in ſeipſum elevandus eſt ad eam poteſtatem, quæ decuplo minor ſit poteſtate 100ij æquè altâ. En operationem :

995000 (1)
599 (1)

8955000
895500
49750

9900250 (2)
520099 (2)

8910225
891023
198
49

9801495 (4)
5941089 (4)

8821345
784120
980
392
88
5

9606930 (8)
396069 (8)

9229310 (16)
139229 (16)

8518016 (32)

8518016 (32)
6108158 (32)

7255660 (64)
665527 (64)

5264459 (128)
9544625 (128)

2771452 (256)
2541772 (256)

554290 (512)

Hæc poteſtas pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè altâ; ergo reſume

2771452 (256)
9544625 (128)

1459018 (384)
665527 (64)

1058613 (448)
6108158 (32)

901728 (480)

Quæ poteſtas rurſus plusquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè altâ, ergo reſume

1058613(448)
139229 (16)

977026(464)

Quæ etiam pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè alta; ergo reſume

1058613(448)
396069 (8)

1017002(456)
5941089 (4)

996814(460)

Hæc quoque pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè altâ; ergo reſume

1017002 (456)
520099 (2)

1006857 (458)
599 (1)

1001823(459)

Cùm igitur 460ma poteſtas termini 99[5 deficiat ab æquè altâ 100rii pluſquam decuplo; at 459na ejuſdem termini 99[5 deficiat ab æquè altâ 100rii minùs quàm decuplo; ajo, rationem 100 ad 99[5 contineri in decupla pluſquam 459 vicibus, minùs autem quàm 460.

Tum, Ut differentia poteſtatum 459næ & 460mæ (nimirum 5009) ad differentiam 459næ & juſtæ (putà 18233) Ita 10000, ad 3639. Quare ratio 100 ad 99 [5 continetur in decupla 459[3639 vicibus.

Porrò

Porrò, Si decupla (ſive ratio 100 ad 99[5 ſumta 459[3639 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejuſmodi ratiunculas continebit ratio 100 ad 99[5 ſemel ſumta. Prodeunt 21769[3 ratiunculæ, quæ ſunt exacta menſura rationis 100 ad 99[5, quâ ſcilicet ratio 99[5 ad 1 deficit a ratione 100 ad 1, hoc eſt, à bis decuplâ, quæ cùm conſtet ratiunculis 2,0000000, demtis hinc 21769[3, reſtat menſura rationis 99[5 ad 1, hæc ſcilicet 1,9978230[7, qui proinde eſt Log-us abſoluti 99[5.

Atque hoc modo æſtimatis rationum quantitatibus in communi quadam menſura, non ſolùm natura & uſus Logarithmorum clarius eluceſcit; ſed & conſtructio eorundem multò facilior evádit. Id quod magis perſpicuum fiet, cum oſtendero alterum etiam longè promtiorem modum rationes æſtimandi. Sed amolienda eſt priùs difficultas, quæ, haut ſcio, an cuiquam detecta, plures utique in errorem induxit. Cum enim ratio duobus terminis intercedens vulgo haut aliter conſideretur, quàm accipiendo alterutrum terminum ut antecedentem, & alterum ut conſequentem; unde cùm ratio eſt quanta (hoc eſt, cùm termini ſunt inæquales) vel major terminus eſt antecedens, & dicitur ratio majoris inæqualitatis, vel minor eſt antecedens, & dicitur ratio minoris inæqualitatis: Ajo ego, eandem rationem iiſdem terminis conceptam poſſe ac debere (ſaltem in Muſicis, atque in hac noſtra Logarithmotechnia) alio etiamnum modo conſiderari ita, ut neuter terminorum exiſtimetur tanquam antecedens, vel conſequens, ſed uterque capiatur ſimul pariter tempore atque ordine. Sic *v. gr.* in Muſicis intervallum diapente, ſive ratio $\frac{2}{1}$ vel $\frac{1}{2}$, poteſt quidem accipi ita, ut numerus undationum ab acutiori phthongo in aere excitatarum, nempe ternarius, ſit antecedens, & binarius, exhibens numerum undationum pari temporis ſpatio â graviori phthongo effectarum, ſit conſequens, dum intelligatur acutior phthongus tempore (vel ſaltim cogitatione) præcedere graviorem; & vice verſâ: ſed nihil vetat, quo minus etiam ambo iſti phthongi ſimul atque eodem tempore conſonent, adeóque neuter altero ſit vel tempore vel naturâ prior. Cæterum nihilo majus ob hoc vel minus evadit intervallum diapente (ratione ſequialterâ conſtans) ſive acutior phthongus præcedat graviorem, ſive contrà, ſeu denique ambo ſimul conſonent. Ita, licèt utilis ſit demonſtrationibus Geometricis conſideratio vulgaris, quâ minor terminus antecedens ad majorem conſequentem dicitur minorem rationem habere, quàm idem ille major tanquam antecedens ad eundem minorem tanquam conſequentem obtineat: Negari tamen haut poteſt, eundem numerum ratiuncularum contineri in ſeſquialtera ratione, ſive ternarius ſit antecedens, ſive binarius, ſive neuter; adeóque conſiderationem antecedentis & conſequentis in æſtimanda mole vel menſura rationum nullum inſtar habere.

Non

Non ſecùs ac quinarius negatus (−5) mole haud differt à quinario affirmato (+5) cùm uterque conſtet quinque unitatibus; diſſimulatâ nimirum affectione, propter quam negatus vel affirmatus cenſetur, & ſolâ mole vel quantitate ſimpliciter æſtimatâ: cùm tamen accipiendo quinarium negatum, prout ſigno negationis affectus eſt, verum ſit, eum minorem eſſe, non modò quovis numero affirmato, ſed & omni negato, qui à nihilo minùs differat, quàm ipſe, quales ſunt binarius vel ternarius negatus (−2, vel −3.) Ubi præter molem numeri conſideratur quoque, utram in partem eadem abeat à nihilo, affirmatam an negatam. Ita quoque ſive uniſonum (vel æqualitatis rationem, quæ quantitate caret, atque ideò rectè componitur nihilo) ponas in phthongo graviori (vel in binario) indéque aſcendas ad phthongum invervallo diapente acutiorem (vel ad ternarium;) ſive contra ponas uniſonum in acutiori (vel æqualitatis rationem in ternario) indeque deſcendas ad phthongum intervallo diapente graviorem (vel ad binarium:) certè eadem eſt utrobique quantitas intervalli Muſici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium) licèt ab uniſono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diverſas planè partes abeat. Unde ſi moles ſola, aut quantitas rationis æſtimetur, diſſimulando utram in partem (majoriſne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major eſt ratio ternarii ad binarium, quàm binarii ad ternarium. Sed ſi cum mole unà includas quoq; conſiderationem proceſſûs à majori termino ad minorem, vel contra; non eo inficias, minorem eſſe quamvis rationem minoris inæqualitatis non modò quâvis ratione majoris inæqualitatis; ſed & quâvis aliâ minoris inæqualitatis, quæ ab æqualitate minùs abſit. Ita ratio antecedentis 5 ad conſequentem 8, non modò minor eſt ratione antecedentis 8 ad conſequentem 9 (vel 5) ſed eâdem quoque minor eſt ratione antecedentis 6 (vel 7) ad conſequentem 8: licèt ſepoſitâ vel neglectâ notione antecedentis & conſequentis, eadem ſit moles rationis $\frac{5}{8}$ atque $\frac{6}{8}$. Diſtinguemus igitur deinceps inter quantitates mole-majores, & affectione-majores: ita ut in rationibus notio inæqualitatis majoris vel minoris nil niſi affectionem innuat. Eas porrò rationes appellamus mole-majores, quarum major terminus diviſus per minorem, dat quotum majorem; & vice verſâ. Præterea majoris inæqualitatis rationum quæcunque mole, eædem & affectione majores ſunt; at minoris inæqualitatis rationes quò ſunt mole majores, eò affectione minores ſunt. Quibus præmiſſis, digeremus ea, quæ reſtant, in propoſitiones.

PROPOSITIO I.

Si duæ quantitates ejuſdem affectionis auferantur ab invicem (affirmata ſc. ab affirmata, vel negata à negata) ſitque quantitas reliqua ejuſdem affectionis cum duabus ab initio datis; quantitas ablata mole-minor eſt quantitate ex qua auferebatur. Sin quantitas reliqua diverſæ ſit affectionis à duabus initio datis; quantitas ablata mole-major eſt quantitate ex qua auferebatur. Sit exempli gr.

ratio ſubducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{5}{8}$)	$\frac{3}{5}$	($\frac{24}{25}$	} tres ſcilicet ratio-

nes ejuſdem affectionis, putà minoris inæqualitatis ſingulæ; ergo, inquam, ratio ſubducta $\frac{5}{8}$ mole-minor eſt ratione ex quâ $\frac{3}{5}$. Sit rurſus

ratio ſubducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{8}{5}$)	$\frac{3}{2}$	($\frac{15}{16}$	} quarum priores

duæ ſunt ejuſdem affectionis, nimirum majoris inæqualitatis ambæ, at tertia $\frac{15}{16}$ diverſæ eſt affectionis, putà inæqualitatis minoris; ergo, inquam, ratio ſubducta $\frac{8}{5}$ mole-major eſt ratione ex quâ $\frac{3}{2}$.

PROPOSITIO II.

Si ſint quotcunque rationes continuæ & terminorum æquidifferentium; v. gr. $\frac{a}{a+b}, \frac{a+b}{a+2b}, \frac{a+2b}{a+3b}$, & deinceps, faciendo ſcilicet antecedentem cujuſque ex poſterioribus rationibus æqualem conſequenti proximè præcedentis, & à minoribus progrediendo ad majores: Erit quælibet præcedentium rationum mole-major qualibet ſequente; ſed & differentiarum inter ipſas rationes tam primarum, quàm ſecundarum, tertiarum, cæterarumque adeò omnium in infinitum, ſemper præcedens mole-major eſt ſequente. Sin à majoribus terminis progrediare ad minores; contrarium eveniet.

Patet ex collatione ſequentis tabellæ cum propoſitione prima.

Rationes.

Rationes. Diff: primæ. Differentiæ ſecundæ.

a

a+b

aa+2ab+bb

aa+2ab

a+b $a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3$

a+2b $a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4$

aa+4ab+4bb

aa+4ab+3bb

a+2b $a^4+10a^3b+36aabb+54ab^3+27b^4$

a+3b $a^4+10a^3b+36aabb+56ab^3+32b^4$

aa+6ab+9bb

aa+6ab+8bb

a+3b $a^4+14a^3b+72aabb+56ab^3+128b^4$

a+4b $a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4$

aa+8ab+16bb

aa+8ab+15bb

a+4b

a+5b

Propoſitio III.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini ſint æquidifferentes, prima eademque minima vocetur a, differentia autem primæ & ſecundæ rationis vocetur b, tum ex differentiis ſecundis prima vocetur c; atque ex tertiis prima vocetur d; & ſic porrò: Aio ſecundam rationem fore a+b, tertiam a+2b+c, quartam a+3b+3c+d quintam a+4b+6c+4d+e; atque ita deinceps, componendo ſingulas rationes ex prima & tot differentiis, quot quæque locis abeſt à prima, ipſis autem differentiis jungendo coefficientes numeros figuratos, primis quidem radices, ſecundis trigonales, tertiis pyramidales, atque ita porrò, ſinguloſque adeò, prout naturali ſerie ordinantur in ſubjecta Tabella:

Unitates.	radices.	trigonales.	pyramidales.	trigono-trigonales.	trigono-pyramidales.	pyramidi-pyramidales.	trigono-trigono-pyramid.	trigono-pyramidi-pyramid.	pyramidi-pyramidi-pyramida.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	
1	4	10	20	35	56	84	120		
1	5	15	35	70	126	210			
1	6	21	56	126	252				
1	7	28	84	210					
1	8	36	120						
1	9	45							
1	10								

Nimirum eodem modo, quo iidem figurati numerant complementa poteſtatum à radice binomia genitarum; obſervato aſcenſu obliquo à ſiniſtra dextrorſum.

Sic undecima ratio conſtat ex $a+10b+45c+120d+210e+252f+210g+120h+45i+10k+l$; ſumtis ordine numeris imam tabellæ baſin occupantibus. Exhibet

Exhibet autem tabella non modò quotam velis rationem; ſed & ſummam quotcunque continuè ſequentium, pari fermè negotio methodoque. Sic ſumma quinque rationum eſt $5a+10b+10c+5d+e$, obſervato aſcenſu obliquo, ut antè.

Demonſtratio.

Rationes.	diff: primæ.	Secundæ.	Tertiæ.	4
a				
	b			
a+b		c		
	b+c		d	
a+2b+c		c+d		e
	b+2c+d		d+e	
a+3b+3c+d		c+2d+e		
	b+3c+3d+e			
a+4b+6c+4d+e				

Cùm enim per præcedentem, progrediendo à majoribus terminis ad minores (vel quod idem eſt, à minoribus rationibus ad majores) non modò ſecunda ratio excedat primam, ſed & primarum, ſecundarum, cæterarumque differentiarum ſecunda quæque excedat primam; licebit ſanè iſtos exceſſus vocare b, c, d, & deinceps.

Cùm a. differentiarum tertiarum prima ſit d } Ex hy-
Et quartarum prima (quâ ſecunda tertiarum excedit primam) e } potheſi;
Erit ſanè ſecunda tertiarum d+e
Rurſus cùm ſecundarum differentiarum prima ſit c } Ex hy-
Et tertiarum prima (quâ altera ſecundarum excedit primam) d } potheſi;
Erit ſanè altera ſecundarum c+d
Sed 2da 3tiarum (quâ tertia ſecundarum excedit alteram) erat d+e
Ergo tertia ſecundarum erit c+2d+e
Porrò cùm primarum differentiarum prima ſit b } Ex hy-
Et ſecundarum prima (quâ ſecunda primarum excedit primã) c } potheſi;
Erit ſanè ſecunda primarum b+c
Sed altera ſecundarum (quâ tertia primarum excedit 2dam) erat c+d
Ergo tertia primarum b+2c+d
Sed & 3tia 2darum (quâ quarta primarum excedit 3tiam) erat c+2d+e
Ergo quarta primarum erit b+3c+3d+e
Denique cùm prima ratio ſit a } Ex hypotheſi;
Et differentia inter primam & ſecundam rationem b }
Erit ſanè ſecunda ratio a+b
Et cùm differentiarum primarum ſecunda foret b+c
Erit tertia ratio a+2b+c Sed

Sed & differentiarum primarum tertia erat $b+2c+d$
Ergo quarta ratio $a+3b+3c+d$
Tandem differentiarum primarum quarta erat $b+3c+3d+e$
Ergo quinta ratio $a+4b+6c+4d+e$

Poſtremò rationes { Prima a ; Secunda $a+b$; Tertia $a+2b+c$; Quarta $a+3b+3c+d$; Quinta $a+4b+6c+4d+e$ } addantur,

ſit ſumma quinque rationum $5a+10b+10c+5d+e$.

Rationes vel magnitudines.

Prima	a
$\overline{2}$	$a+b$
$\overline{3}$	$a+2b+c$
$\overline{4}$	$a+3b+3c+d$
$\overline{5}$	$a+4b+6c+4d+e$
$\overline{6}$	$a+5b+10c+10d+5e+f$
$\overline{7}$	$a+6b+15c+20d+15e+6f+g$
$\overline{8}$	$a+7b+21c+35d+35e+21f+7g+h$
$\overline{9}$	$a+8b+28c+56d+70e+56f+28g+8h+i$
$\overline{10}$	$a+9b+36c+84d+126e+126f+84g+36h+9i+k$

Propoſitio IV.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini ſint æquidifferentes, prima eademque maxima vocetur a, differentia autem primæ & ſecundæ vocetur b, tum differentiarum ſecundarum prima vocetur c, tertiarum prima d, & ſic deinceps; Aio ſecundam rationem fore $a-b$, tertiam $a-2b+c$, quartam $a-3b+3c-d$, quintam $a-4b+6c-4d+e$; atque ita deinceps, alternatis ſemper ſignis affirmatis & negatis. Demonſtratur ut præcedens.

Propoſitio V.

Datæ rationis multiplicem invenire prope verum.

Conſtructio. Differentiam terminorum datæ rationis duc in denominatorem multiplicis dati, & à facto aufer ipſam differentiam, reliqui ſemiſſem adde termino majori, & detrahe minori; ita prodibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quæſitâ. Tum ſi termini prodeuntes

ſint

ſint fortè numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omiſſis, ratio quæſita cenſebitur in numeratoribus integris & à fractione liberis. *V. gr.* Quæratur rationis $\frac{15}{28}$ quadruplum. Differentia terminorum 3 ducta in 4 exhibet 12, unde ablatis tribus reſtant 9, cujus ſemis $4\frac{1}{2}$ additus termino majori 28, facit $32\frac{1}{2}$, detractus autem minori 25, relinquit $20\frac{1}{2}$; erit igitur ratio $20\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{2}$ paulo major quadruplo rationis $\frac{15}{28}$. Reductis terminis $20\frac{1}{2}$ & $32\frac{1}{2}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{41}{2}$ & $\frac{65}{2}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{41}{65}$ paulo major quæſitâ.

Demonſtratio hujus & ſequentis propoſitionis conſtabit ex propoſitione VII.

Propoſitio VI.

Datæ rationis partem imperatam invenire prope verum.

Conſtructio. Differentiam terminorum datæ rationis divide in partes totidem, quot denominator partis quæſitæ conſtat unitatibus, atque ex iis partibus exemtâ unâ, reliquarum ſemiſſem adde termino minori, & detrahe quoque majori; ita probibunt duo termini exprimentes rationem paulo minorem quæſitâ: Tum ſi termini prodeuntes ſint fortè numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omiſſis, ratio quæſita cenſebitur in numeratoribus integris, & à fractione liberis. *V. gr.* Oporteat rationis $\frac{3}{7}$ invenire partem quintam. Differentia terminorum 2 diviſa quinquefariam exhibet $\frac{2}{7}$, quæ eſt una pars quinta, eximenda ex integra ſumma quinque partium, quæ erat 2, & reſtant $\frac{5}{7}$, quarum ſemis $\frac{5}{7}$ additus termino minori 3, facit $3\frac{5}{7}$; detractus verò ex majori 5, reliquum facit $4\frac{5}{7}$; erit igitur ratio $3\frac{5}{7}$ ad $4\frac{5}{7}$ paulo minor, quàm pars quinta rationis $\frac{3}{7}$. Reductis terminis $3\frac{5}{7}$ & $4\frac{5}{7}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{26}{7}$ & $\frac{33}{7}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{26}{33}$ paulo minor quæſitâ. Rurſus inveniendus ſit rationis $\frac{8}{11}$ ſemis. Differentia terminorum 3 bipartita exhibet $1\frac{1}{2}$, qui eſt unus ſemis, eximendus ex integra ſumma duarum partium 3, & reſtat $1\frac{1}{2}$, cujus ſemis $\frac{1}{4}$ additus termino minori 8, facit $8\frac{1}{4}$; detractus autem ex majori 11, relinquit $10\frac{1}{4}$; erit igitur ratio $8\frac{1}{4}$ ad $10\frac{1}{4}$ paulo minor ſemiſſe rationis $\frac{8}{11}$. Reductis terminis $8\frac{1}{4}$ & $10\frac{1}{4}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{33}{4}$ & $\frac{41}{4}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{33}{41}$ paulo minor quæſitâ.

Propoſitio VII.

Invenire, quantum pars rationis imperata, quæ per præcedentem invenitur, deficiat ab exactiori.

Conſtructio.

Constructio. Primò, si partis imperatæ denominator sit numerus impar; sume rationes, quæ sunt rationi per præcedentem inventæ utrinque vicinæ & æquidifferentes, ita habebis tres rationes, quarum minimam aufer à media, & mediam à maxima, prodibunt duæ differentiæ, quarum differentiam denuò investigabis, tantisper asservandam. Deinde partis imperatæ denominatori unitatem detrahe, reliqui semissem in tabula Figuratorum insertâ prop. III, quære inter radices, & invento congruentem numerum trigonalem excerptum tripartire, sic invenies, quoties sumenda sit differentiarum differentia suprà asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. *V.gr.* Scire velim, ratio $\frac{19}{21}$ per præcedentem inventa quantum deficiat ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$. Rationi $\frac{19}{21}$ utrinque vicinæ & æquidifferentes sunt $\frac{17}{19}$ & $\frac{11}{23}$. Differentia minimæ à media $\frac{437}{441}$ & mediæ à maxima $\frac{357}{361}$, & harum differentiaarum differentia $\frac{157437}{157757}$ asservanda. Tum partis imperatæ denominatori 5 detraho 1, restant 4, cujus semissi 2 inter radices invento congruit trigonalis numerus 3, cujus triens est 1, indicans differentiarum differentiam supra asservatam $\frac{157437}{157757}$ semel sumtam exhibere particulam, quâ ratio $\frac{19}{21}$ deficit ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$, adeò ut hujus exactior pars quinta sit ratio $\frac{19}{21}$ + ratione $\frac{157437}{157757}$.

Sin partis imperatæ denominator sit numerus par; sume semissem differentiæ terminorum rationis per præcedentem inventæ, quem ejusdem termino minori detrahes, & majori addes pariter ac detrahes; ita obtinebis quatuor rationes continuas terminorum æquidifferentium, ex quibus minorum duarum differentiam auferes ex majorum duarum differentia, & emergentem differentiarum differentiam asservabis. Deinde partis imperatæ denominatorem bipartire, & invento semissi congruentes in tabella propositioni III. subjuncta species excerpe, saltim usque ad c speciem, positoque $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{2}{3}$; duc cujusque speciei valorem in suum coëfficientem, collectisque omnibus in unam summam, habebis, quot vicibus sumenda sit differentiarum differentia suprà asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. Ex.gr. Rationis $\frac{8}{11}$ octans per præcedentem inventus sit $\frac{149}{155}$; Scire velim, quantum is deficiat ab exactiori. Differentia terminorum est 6, cujus semis 3 detractus minori termino, relinquit 146; additus autem majori, facit 158; & detractus majori, relinquit 152. Sunt ergo quatuor rationes continuæ terminorum æquidifferentium $\frac{146}{149}$, $\frac{149}{152}$, $\frac{152}{155}$, $\frac{155}{158}$. Differentia duarum minorum rationum $\frac{24016}{24025}$ ablata à differentia duarum majorum

jorum $\frac{22192}{22201}$ relinquit differentiarum differentium $\frac{1753825}{1753879}$ aſſervandam. Partis imperatæ denominator eſt 8, cujus ſemiſſi 4 congruunt in tabella propoſitioni III ſubjuncta ſpecies iſtæ: $a+3b+3c$, ſed $a=\frac{1}{2}$, & $3b=6$, & $3c=4$, quæ juncta faciunt $10\frac{1}{2}$. Ergo differentiarum differentiæ $\frac{1753825}{1753879}$ ſuprà ſervatæ ſumendum eſt decuplum cum ſemiſſe, ut acquiramus particulam, quâ octans per præcedentem inventus deficit ab exactiori. Atqui rationis $\frac{1753825}{1753879}$ decuplum per V hujus eſt $\frac{1753582}{1754122}$ vel $\frac{876791}{877061}$, & ſemis per VI eſt $\frac{3507677}{3507731}$. adeò ut rationis $\frac{9}{11}$ octans exactior præter rationem per præcedentem inventam $\frac{143}{144}$ contineat etiamnum ratiunculas $\frac{876791}{877061}$, & $\frac{3507677}{3507731}$.

Demonſtratio.

Cùm per III hujus ſumma trium rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarum ſit $3a+3b+c$

Erit ejuſdem ſummæ triens $a+b+\frac{1}{3}c$ α

Rurſus differentia primæ & ſecundæ rationis eſt b

ſecundæ autem & tertiæ $b+c$

Ergo differentiarum differentia c

Cujus triens $\frac{1}{3}c$

Quem ſi addas mediæ trium rationum $a+b$

Erit ſumma $a+b+\frac{1}{3}c$

Æqualis nempe trienti trium rationum ſuprà notato literâ α. Ergo diſcerptâ ratione quavis in tres continuas terminorum æquidifferentium, ut jubet propoſitio VI, erit media ex iis paulò minor triente totius diſcerptæ, & quidem tanto minor, quantus eſt triens differentiæ differentiarum intercedentium inter rationem primam & ſecundam, nec non inter ſecundam & tertiam, quod innuit propoſitio VII.

Sic quoque per III hujus, ſumma ſedecim rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarû, eſt $16a+120b+560c+1820d$

Et ejuſdem ſummæ octans $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$ β

Tum per tabellam propoſitioni III ſubjunctam, quatuor mediæ ex iſtis ſedecim, nimirum 7ma, 8va, 9na, 10ma, ſunt
$a+6b+15c+20d$
$a+7b+21c+35d$
$a+8b+28c+56d$
$a+9b+36c+84d$

Differentia duarum priorum $b+6c+15d$

poſteriorum $b+8c+28d$

Differentiarum differentia $2c+13d$

Hujus decuplum $20c+130d$

& ſemis $c+6\frac{1}{2}d$

Unà cum ſumma duarum ex quatuor iſtis mediar. $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$

Facit $2a+15b+70c+228d$

Æqualem octanti ſedecim rationum ſuprà notato literâ β. Ergo ſi ratio data diſcerpatur in partes ſedecim, erunt duæ mediæ ex iis ſimul, paulò minores octante totius diſcerptæ; & quidem tanto minores, quantum eſt differentiæ differentiarum (intercedentium inter rationes ex ſedecim iſtis ſeptimam & octavam, nec non inter 9nam & 10mam) decuplum cum ſemiſſe. q. e. d.

Propoſitio VIII.

Rationes terminorum æquidifferentium ſunt propemodum, ut reciprocè ipſorum terminorum media Arithmetica.

Explicatio. Sumatur per VI hujus rationis cujuſvis, v.gr. $\frac{8}{9}$ pars quævis, v.gr. ſemis $\frac{17}{18}$; tum pars quævis alia, v.gr. triens $\frac{51}{54}$, & ut fiant terminorum æquidifferentium, pro $\frac{8}{9}$ ſumatur $\frac{16}{18}$, & pro $\frac{51}{54}$ æquipollens $\frac{68}{72}$. Medium Arithmeticum terminorum rationis totius eſt 17, ſemiſſis, 34, trientis 51. Liquet igitur, ut tota ratio $\frac{16}{18}$ eſt ad ſemiſſem ſuum $\frac{17}{18}$, ita reciprocè ſemiſſis medium Arithmeticum 34 eſſe ad medium totius 17: & ut tota ratio $\frac{68}{72}$ eſt ad trientem ſuum $\frac{51}{72}$; ita reciprocè trientis medium Arithmeticum 51 eſſe ad medium totius 17: ideóque etiam, ut ſemis $\frac{17}{18}$ eſt ad trientem $\frac{17}{18}$; ita reciprocè trientis medium 51 eſſe ad medium ſemiſſis 34: Tantum porrò hanc analogiam abire à vero, quantum ſemiſſes, trientes, parteſve aliæ rationum per VI hujus inventæ deficiunt ab exactis. Quamobrem id agendum, ne defectus ille inſtituto noſtro officiat. Cæterum minor erit defectus, minúſque adeò officiet, quo rationes in analogiam aſcitæ minores fuerint. Cum enim ſecundum demonſtrationem præcedentis, octans exactus ſedecim rationum foret $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$, at ſumma duarum ex ſedecim iſtis mediarum $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$, qui eſt octans per VI inventus; patet differentiam horum octantium conſiſtere in contemtiori

temtiori parte ſecundarum & tertiarum differentiarum. Atqui rationum continuarum minores, habent differentias primas minores, ac proinde differentiarum ſecundarum & tertiarum partem exiliorem multò etiamnum minorem. Sed exemplo res fiet illuſtrior. Nam rationis $\frac{99}{101}$ ſemis, per VII hujus, eſt $\frac{199}{201}+\frac{7999399}{79994013}$. ubi ratio $\frac{199}{201}$ ab exactiori ſemiſſe deficit ratiunculâ ſuperbipartiente $\frac{7999399}{79994013}$. Rurſus rationem $\frac{199}{201}$ (quæ priùs aſſumtæ $\frac{99}{101}$ propemodũ ſemis eſt) ſi denuò bipartiamur per VII hujus, habebimus $\frac{399}{401}+\frac{127997599}{127997601}$, ubi ratio $\frac{399}{401}$ ab exactiori ſemiſſe deficit ratiunculâ ſuperbipartiente $\frac{127997599}{127997601}$. Minor eſt igitur defectus, cùm bipartimur rationem minorem $\frac{199}{201}$, quàm ſi bipartiamur majorem $\frac{99}{101}$, quantò ſcilicet ratiuncula ſuperbipartiens $\frac{127997599}{127997601}$ minor eſt ſuperbipartiente $\frac{7999399}{79994013}$, hoc eſt propemodum, quantò 8 milliones minores ſunt 128 millionibus, nimirum ſedecim vicibus. Sed & ejuſdem rationis quò minor pars ſumetur per VI hujus, eò minùs deficiet à vero. Sic rationis $\frac{99}{101}$ ſemis, per VII hujus, erat $\frac{199}{201}+\frac{7999399}{79994013}$ & ejuſdem triens per eandem eſt $\frac{299}{301}+\frac{8099459197}{8099460797}$; ubi quidem triens $\frac{299}{301}$ (qualis per VI invenitur) minùs deficit ab exactiori, quàm ſemis $\frac{199}{201}$ (per eandem inventus;) quantò ratiuncula $\frac{8099459197}{8099460797}$ minor eſt alterâ $\frac{7999399}{79994013}$. Unde ſequitur, cùm bipartitâ ratione $\frac{99}{101}$ ſecundum VI hujus, non niſi binarium quaſi perdamus in octo millionibus, vel unitatem in quatuor millionibus; futurum, ut iſtius ſemiſſe $\frac{199}{201}$ (ſive $\frac{99\lceil 5}{100\lfloor 5}$) diminuto quovis modo per analogiam VI^{tæ} hujus ſuperſtructam, minùs etiam perdamus; adeóque à ratione $\frac{99\lceil 5}{100\lfloor 5}$ nos analogicè argumentari poſſe ad quamvis minorem terminorum æquidifferentium, ita ut minùs quàm unitatem perdamus in quatuor millionibus; quóque ratio, ad quam argumentamur, minor fuerit, eò jacturam fore minorem.

Propoſitio IX.

Datâ menſurâ rationis $\frac{99[5}{100[5}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; invenire menſuram cujuſvis minoris rationis terminorum æquidifferentium, in particulis ſimilibus.

Rationis $\frac{99[5}{100}$ menſura ſuprà inventa fuit $21769[3$, & rationis $\frac{100}{100[5}$ menſura ibidem $21659[7$, quarum ſumma exhibet rationem $\frac{99[5}{100[5}$ $=43429[0$. Dehinc oporteat nos invenire menſuram rationis $\frac{\cdots}{101}$. Ergo per præcedentem dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{100}{101}$ (nimirum $100[5$) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100_3) ita menſura hujus rationis (putà 43429) ad menſuram iſtius 43213. Tot igitur particulis Log-us abſoluti 101 excedit Log-um abſoluti 100. Quare, cùm Log-us abſoluti 100 ſit $2,0000000_3$ oportet, ut Log-us abſoluti 101 ſit 2,0043213.

Porrò invenienda ſit menſura rationis $\frac{101}{102}$. Dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{101}{102}$ (nimirum $101[5$) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100_3) ita menſura hujus rationis (putà 43429) ad menſuram iſtius 42787. Tot igitur particulis Log-us abſoluti 102 excedit Log-um abſoluti 101. Quare, cùm Log-us abſoluti 101 foret $2,0043213_3$ oportet, ut Log-us abſoluti 102 ſit 2,008600.

Cùm autem in omnibus hiſce analogiis terminus ſecundus ſit 100, & tertius 43429_3 liquet, ad inveniendam menſuram cujuſvis rationum ſequentium nihil amplius reſtare, quàm ut dividamus numerum 43429 per medium Arithmeticum terminorum rationis datæ. Cæterùm invenimus nos quidem rationis $\frac{99[5}{100[5}$ menſuram 43429, quæ fortè debebat eſſe unitate major, putà 43430_3 ſed facilè intelligit quivis, ſi pro ratione $\frac{99]5}{100]5}$

aſſumſiſſemus

assumsissemus $\frac{999}{1000}\left[\frac{5}{5}\right.$, & in cumulandis horum terminorum potestatibus calculum ad plures locos extendissemus, ad majorem utique præcisionem perveniri potuisse, adeóque huic methodo ad accuratam facilitatem nihil quicquam deesse. At non deest modus etiam hoc ipso facilior, qui post acquisitos paucos Logarithmos solâ additione rem peragit, & præterea probam suam secum fert, quem propositionibus sequentibus breviter exponemus.

Propositio X.

Rationum duarum continuarum differentia est ad aliarum duarum continuarum differentiam; ut harum communis termini quadratum, ad istarum communis termini quadratum; dummodo singularum termini sint æquidifferentes.

Sint duæ rationes continuæ $\frac{a}{a+b,}$ & $\frac{a+b}{a+2b,}$ quarum terminus communis est $a+b$, & hujus quadratum $aa+2ab+bb$; sint verò & aliæ duæ continuæ $\frac{a+3b}{a+4b,}$ & $\frac{a+4b}{a+5b,}$ quarum communis terminus est $a+4b$, & hujus quadratum $aa+8ab+16bb$. Singularum termini differunt communi excessu b. Differentia duarum priorum est $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb,}$ & posteriorum duarum $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb.}$ Atque hæ differentiæ sunt quoque terminorum æquidifferentium. Ergo per VIII hujus, sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica; hoc est, ut prior differentia $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb,}$ ad posteriorem $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$: ita horum terminorum medium Arithmeticum $aa+8ab+15\frac{1}{2}bb$, ad medium Arithmeticum istorum $aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; hoc est propemodum, ut communium terminorum quadrata, nimirum $aa+8ab+16bb$ ad $aa+2ab+bb$; quæ ab istis mediis Arithmeticis non nisi quantitate $\frac{1}{2}bb$ differunt, exiguâ sanè, & in rationibus minoribus (ubi sc. differentia terminorum b ad ipsos terminos exiguum instar habet) facilè contemnendâ.

Propositio

Propoſitio XI.

Rationum trium continuarum differentiarum differentia, eſt ad aliarum trium continuarum differentiarum differentiam, ut cubus medii Arithmetici mediæ ex his, ad cubum medii Arithmetici mediæ ex iſtis; dummodo ſingularum rationum termini ſint æquidifferentes.

Sint tres rationes continuæ $\frac{a}{a+b}\ \frac{a+b}{a+2b}\ \frac{a+2b}{a+3b}$, quarum differentia differentiarum eſt $\frac{a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3}{a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum eſt $a+\frac{3b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; ſint verò & aliæ tres continuæ $\frac{a+2b}{a+3b}\ \frac{a+3b}{a+4b}\ \frac{a+4b}{a+5b}$, quarum differentia differentiarum eſt $\frac{a^4+14a^3b+72aabb+160ab^3+128b^4}{a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum $a+\frac{7b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$. Cæterùm ſingulæ rationes differunt communi exceſſu b; at differentiæ differentiarum non ſunt terminorum æquidifferentium, ſiquidem differentia terminorum prioris eſt $2ab^3+3b^4$, at poſterioris $2ab^3+7b^4$: ſecùs ac in præcedenti propoſitione. Quare cum illic res expediretur regulâ proportionum ſimplici inverſâ, hic opus eſt duplici inverſâ; nimirum:

Ut medium Arithmeticum prioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum poſterioris ($2ab^3+7b^4$) ad medium Arithmeticum poſterioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum prioris ($2ab^3+3b^4$:) Ita differentia differentiarum prior ad poſteriorem: Ita quoque Cubus medii Arithmetici mediæ trium priorum rationum (nimirum $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$) ad Cubum medii Arithmetici mediæ trium poſteriorum rationum (nimirum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{243b^3}{8}$.)

Quæ

Quæ analogia vera esse deprehendetur, si productum extremorum æquale sit producto mediorum.

Atqui primus terminus $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$ in $2ab^3+7b^4$ $=2a^4b^3+19a^3b^4+66a^2b^5+102ab^6+66ab^7+\frac{21b^8}{2}$, si ducatur in quartum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$; productum est $2a^7b^3+40a^6b^4+297a^5b^5+1180a^4b^6+2991\frac{1}{8}a^3b^7$, &c.

Rursus secundus terminus $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$ in $2ab^3+3b^4=2a^4b^3+28a^3b^4+144a^2b^5+322ab^6+263ab^7+\frac{789b^8}{2}$, si ducatur in tertium $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; productum est $2a^7b^3+40a^6b^4+339a^5b^5+1593a^4b^6+4558\frac{1}{8}a^3b^7$, &c.

Hoc igitur productum cum consentiat cum isto, non modò in primis & secundis speciebus, sed & in maxima parte tertiarum & quartarum; ajo analogiam in propositione memoratam, veram esse. Nam defectus, qui hic apparet in productis terminorum, in ipsis terminis longè minor erat, quippe qui multiplicando crevit. Ut taceam in minoribus rationibus differentias secundas & tertias nullius ferè momenti esse.

Simili modo ostendetur, differentias tertias rationum continuarum & terminorum æquidifferentium, esse ut Quadrato-quadrata; quartas, ut Quadrato-cubos terminorum, qui singulis in tabella propositioni II subjunctâ, è regione opponuntur. Atque ita deinceps.

Propositio XII.

Numerorum in progressione Arithmetica ordinatorum Quadrata conveniunt in differentiis secundis, Cubi in tertiis, Quadrato-quadrata in quartis, & sic deinceps.

Patet ex inspectione tabellarum subjectarum:

Numeri	Quadrata	diff. 1.	diff. 2.
1	1		
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		

Numeri

Numeri	Cubi	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

Numeri	Quadrato-quadrata.	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.	diff. 4.
1	1				
		15			
2	16		50		
		65		60	
3	81		110		24
		175		84	
4	256		194		24
		369		108	
5	625		302		
		671			
6	1296				

Hinc patet, datis v. gr. cubis quatuor, vel quadrato-quadratis quinque, quo pacto cæteri continuâ additione succenturiari possint. Sint enim dati

Cubi	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.
$a=8$			
	$e=19$		
$b=27$		$h=18$	
	$f=37$		$k=6$
$c=64$		$i=24$	
	$g=61$		$k=6$
$d=125$		$l=..$	
	$m=..$		
$n=...$			

Dic: $k+i=l$, $l+g=m$, $m+d=n$.

Propositio XIII.

Logarithmos quotvis locorum continuâ ac solâ additione producere ita, ut ultimo existente probo, cæteri omnes sint probi. Con-

Conſtructio. Cùm ſit $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3} + \frac{c^3a}{b^4}$, & deinceps continuando progreſſionem in infinitum; ſi ponamus $a=100=$ medio Arithmetico rationis $\frac{99\lfloor 5}{100\lfloor 5}$ & $b=100000$, & $c=c\lfloor 5$, adeò ut $b-c$ ſit $99999\lfloor 5=$ medio Arithmetico rationis datæ $\frac{99999}{100000}$, cujus menſuram invenire oportet, erit $\frac{a}{b-c}$ $\left(\text{nimirum } \frac{100}{99999\lfloor 5}\right)$ $= \frac{a}{b}$ $\left(\text{ſive } \frac{100}{100000} \text{ vel } 0\lfloor 001\right) + \frac{ca}{bb}$ $\left(\text{ſive } \frac{0\lfloor 5 * 100}{10000000000} \text{ vel } \frac{50}{10000000000} \text{ vel } 0\lfloor 00000005\right) + \frac{cca}{b^3}$ $\left(\text{ſive } \frac{0\lfloor 25 * 100}{1000000000000000} \text{ vel } \frac{25}{1000000000000000} \text{ vel } 0\lfloor 00000000000000025\right) + \frac{c^3a}{b^4}$ $\left(\text{ſive } \frac{0\lfloor 125 * 100}{100000000000000000000} \text{ vel } \frac{1\lfloor 25}{100000000000000000000} \text{ vel } 0\lfloor 000000000000000000125\right) = 0\lfloor 001000005000025000125:$

ſin manentibus a & b, ut antè, ponatur $c=1\lfloor 5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0\lfloor 001000015000225003375$: vel ſi rurſus manentibus a & b, ponatur $c=2\lfloor 5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0\lfloor 001000025000625015625$. Liquet ex præcedenti, quo pacto datis numeri 5 quadrato & cubo, ſequentium quoque numerorum 15, 25, cæterorumque quadrata & cubi additione continuâ inveniri poſſint. Iſtis igitur numeris cum ſuis quadratis & cubis ritè diſpoſitis ita, ut poſt unitatem in $0\lfloor 001$ ſextum locum occupet ultima figura numeri 5 (vel 15, vel 25;) & ſextum ab hac locum ultima figura quadrati 25 (vel 225, vel 625;) & ab hac rurſus ſextum locum ultima figura cubi 125 (vel 3375, vel 15625; (quemadmodum exempla ſuperiora oſtendunt: conflati erunt numeri, qui in tertium Regulæ aureæ terminum 43429 ducendi ſunt ſinguli, ut prodeat menſura rationum datarum $\frac{99999}{100000}$, $\frac{99998}{99999}$, $\frac{99997}{99998}$. Atque hæc multiplicatio, ut ſolâ quoque additione perficiatur, digerendus eſt tertius terminus 43429 in tabellam ſubſidiariam, hoc modo:

1	43429
2	86858
3	130287
4	173716
5	217145
6	260574
7	304003
8	347432
9	390861

Acquisitâ hoc modo rationum omnium mensurâ à $\frac{99999}{100000}$ usque ad $\frac{10000}{10001}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; mox addendo has ordine retrogrado concinnabimus Logarithmos singulorum absolutorum à 10000 ad 100000; quorum ultimus si sit probus, præcedentes omnes erunt probi; nisi fortè error posterior quasi ex condicto corrigat priorem, quod in hac non magis quàm omnibus aliis probis, nec nisi rarissimè usuvenire potest.

ATque ita expositâ methodo construendi Logarithmos novâ, accuratâ, & facili, haud scio, an opus sit monere Lectorem, si ad praxin accedere luberet, non requiri compositorum numerorum Logarithmos; ideoque omnes pares primùm excludendos, deinde omnes à quinario productos; ita ut restent soli Logarithmi numerorum in unitatem, 3rium 7rium 9rium exeuntium, àtque horum quoque tertium quemque, cùm sit ex ternario compositus, omitti posse, Sic acquisitis Logarithmis absolutorum 1003 & 10013, omisso Log-o absoluti 10023 ex ternario compositi quærendus est Log-us absoluti 10033, utpote triceſsimi ab absoluto 10003; tum Log-us absoluti 10043, triceſimi ab absoluto 10013: tum rursus omisso Log-o numeri 10053, quærantur Log-i numerorum 10063, 10073; atque ita deinceps. Quare dicendum per Regulam Propositione VIII. traditam:

Ut 10048, nimirum medium Arithmeticum inter 10033 & 10063, ad 10018, nimirum medium Arithmeticum inter 10003 & 10033:

Ita 13006, nimirum differentia Logarithmorum congruentium absolutis 10003 & 10033,

ad

ad 12967, differentiam Log-orum competentium abſolutis 10033 & 10063.

Dico:

Ut { 10048 / 10078 / 10108 / &c. } ad 10018; ita 13006, ad { 12967 / &c. }

Item:

Ut { 10058 / 10088 / 10118 / &c. } ad 10028; ita 12992, ad { 12953 / &c. }

At tertius qui ſequitur ordo, nimirum:

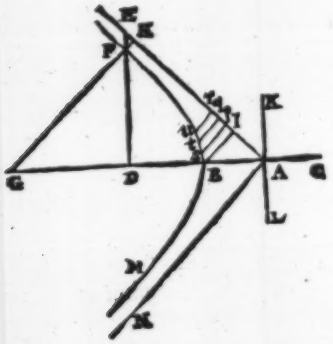
Ut { 10068 / 10098 / &c. } ad 10038; ita 12979, ad { 12940 / &c. }

hic ipſe eſt, quem omittendum indigeto.

Pari modo tertius quiſque in unitatem 7rium, 9rium exeuntium omittetur. Itaque fiet, omiſſis paribus lucrifaciamus ſemiſſem operæ, & detractis quinariis rurſus partem decimam, denique excluſo tertio quoque in 1, 3, 7, 9, deſinentium, trientem laboris reſidui; unde non niſi $\frac{4}{15}$. nonaginta chiliadum, quæ ſunt à 10000 ad 100000, induſtriam noſtram expectant. Hoc eſt, de 90 chiliadibus reſtant ſolùm 24 concinnandæ. Cæteros compoſitos à 7rio, 11rio, aliis ve primis genitos, non eſt operæ pretium ſecernere in methodo tam proclivi; præſertim cum probando calculo inſervire poſſint.

Caterum ex iis, quæ hactenus diſſeruimus, ſatis liquet, naturam Logarithmorum Geometriæ nullo modo obnoxiam eſſe; ſed verius ac liquidius ex proprio ſuo fonte manare. Intercedit tamen utriſque cognatio ſuavis, & contemplatione digniſſima, quam deinceps paucis exponere non gravabor.

Propositio XIV.



Sit Hyperbole MBF, cujus latus rectum KL æquale sit transverso BC; erunt asymptoti AN & AE ad angulos rectos, & quadratum DF æquale rectangulo CDB per 21. I. Conicor. Ex B & cadant perpendiculares ad asymptoton BI & FH. Dico, AH esse ad AI, ut BI ad FH.

Demonstratio. Sit $AB = 1 = AC$

$BC = AB + AC = 2$

$BD = a$

$AD = AB + BD = 1 + a = DE$

$CD = BC + BD = 2 + a$

$CD * BD = 2 + a$ in $a = 2a + aa = \square : DF$

$DF = \sqrt{2a + aa} = DG$

$AG = AD + DG = 1 + a + \sqrt{2a + aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: AG . AH$

$AH = \frac{1 + a + \sqrt{2a + aa}}{\sqrt{2}}$

$EF = DE - DF = 1 + a - \sqrt{2a + aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: EF . FH$

FH

$$FH = \frac{1+a-\sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$$

Ducatur AH in FH;

ponendo $1+a = c$, & $\sqrt{2a+aa} = d$

erit $1+2a+aa = cc$

& $2a+aa = dd$ } subtrahe

$1 = cc-dd$

$$\frac{cc-dd}{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = AH * FH \qquad \alpha$$

$\sqrt{2}.1 :: AB.AI$

$$AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AI * BI = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \beta$$

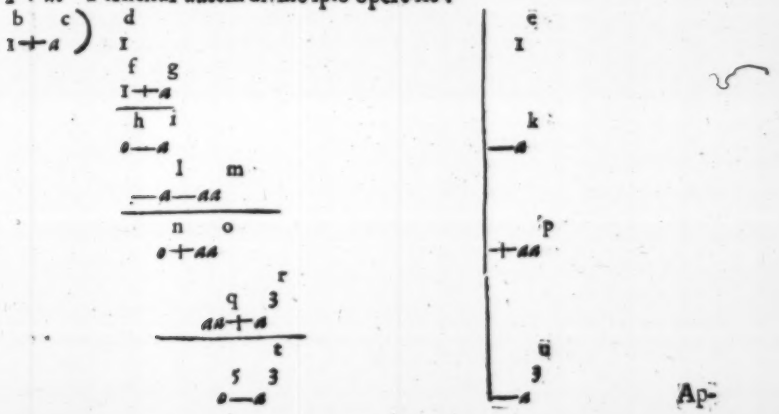
Ergo per α & β, $AH * FH = AI * BI$

& $AH.AI :: BI\ FH$ q.e.d.

Propositio XV.

In diagrammate præcedenti, positâ $AI = BI = 1$, & $HI = a$; oporteat invenire FH.

Dic per præcedentem: ut AH ad AI, ita BI ad FH; hoc est, $1+a.1 :: 1. \frac{1}{1+a}$; nimirum FH æqualit est unitati divisæ per $1+a$. Perficitur autem divisio ipso opere sic:



Ap-

Applica $1+a$ ad 1, oritur 1; tum 1 in $1+a$ producit $1+a$ ſubducendum ex 1, & reſtat $0-a$. Rurſus $1+a$ applicetur ad $0-a$, oritur $-a$; tum $-a$ in $0-a$ producit $-a-aa$, ſubducendum ex $0-a$, & reſtat $0+aa$. Ad hoc applica $1+a$, oritur $+aa$; quod ductum in $1+a$ gignit $aa+a$, ſubducendum ex $0+aa$, & reſtat $0-a$.

Atque ita continuatâ operatione, deprehenditur $\frac{1}{1+a} = 1-a+aa-a^3+a^4$ (&c.) $= FH$.

Propoſitio XVI.

Quovis numero in partes æquales innumeras diſcerpto; invenire ſummam quarumvis poteſtatum ab innumeris iſtis numeris genitarum.

Numeri dati poteſtas proximè ſuperior poteſtatibus quæſitis, ſi dividatur per exponentem ſuum, extabit ſumma poteſtatum quæſita.

V. gr. Numerus datus ſit 21, hic ſi diſcerpatur in partes innumeras, continebit non modò hos numeros 20, 19, 18, 17 &c. ſed & innumeros interjectos, quorum quiſque intelligitur ductus in unam partem infinitiſſimam numeri 21, Horum igitur omnium productorum ſummam ſi quæras; quoniam ipſa producta ſunt poteſtates primæ (ſive lineæ;) erit poteſtas proximè ſuperior quadratica; & ejus exponens 2, Ergo dati numeri 21 quadratum 441, ſi dividatur per exponentem 2, extabit ſumma omnium primarum poteſtatum, genitarum ab innumeris iſtis numeris, qui in dato numero 21 continentur, nimirum 220⌊5. Rurſus quævis poteſtas prima intelligatur ducta in ſeipſam, & oporteat nos invenire ſummam omnium iſtorum quadratorum. Poteſtas proximè ſuperior eſt cubica, & ejus exponens 3, Ergo dati numeri 21 Cubus 9261, ſi dividatur per exponentem 3, extabit ſumma omnium quadratorum 3087. Horum quadratorum quodvis ducatur in ſuum latus, & oporteat nos invenire ſummam omnium iſtorum cuborum. Poteſtas proximè ſuperior eſt quadrato-quadratica, & ejus exponens 4. Ergo dati numeri 21 quadrato-quadratum 194481, ſi dividatur per exponentem 4, extabit ſumma omnium cuborum 48620⌊25.

Demonſtratio.

Demonſtratio. Summa omnium ab unitate imparium æqualis eſt quadrato numeri terminorum ſic numerus terminorum omnium imparium ab unitate uſque ad 21 eſt 11, cujus quadratum 121 æquale eſt ſummæ omnium horum imparium; 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21. At idem quadratum 121 duplicatum, nimirum 242, excedit ſummam omnium eorundem imparium una cum paribus incluſis ipſo numero terminorum 11; deficit autem á ſumma omnium parium æque ac imparium eodem numero terminorum 11. Ergo quadratum duplicatum numeri terminorum imparium non poteſt excedere vel deficere à ſumma omnium tam parium, quam imparium, pluſquam ipſo numero terminorum imparium, hoc eſt (ſi termini ſint innumeri) eodem numero terminorum ſive dimidio termini maximi, ducto in partem infinitiſſimam numeri dati. Quod productum ſi quis putet, adhuc rationem aliquam obtinere ad ſummam omnium terminorum; nondum utique diviſus eſt numerus datus in partes innumeras, quod eſt contra hypotheſin. Ergo quadratum dimidii numeri terminorum (tam parium quam imparium) duplicatum; vel, quod idem eſt; Dimidium quadrati numeri omnium terminorum (tam parium quam imparium) æquale eſt ſummæ omnium terminorum.

Rurſus; Numerus pyramidalis ultimi ab unitate imparium, æqualis eſt ſummæ omnium quadratorum ab iiſdem imparibus factorum. Sic numeri 21, tanquam ultimi imparium, pyramidalis 1771, æqualis eſt ſummæ omnium quadratorum factorum ab his imparibus, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Unde haud ſecus, ac modò, conficietur; eundem pyramidalem duplicatum (ſi termini ſint innumeri) vel, quod idem eſt; trientem cubi facti à numero dato, æqualem eſſe ſummæ omnium quadratorum ab imparibus æquè ac paribus factorum.

Item; Ultimi cujuſvis Trigonus in ſe ductus, æqualis eſt ſummæ omnium cuborum ab imparibus æquè ac paribus factorum. Sed Trigonus iſte, ſive ſumma terminorum, ſuprà æqualis erat $\frac{\text{Quadrato}}{2}$, ergo ejuſdem. Trigoni quadratum æquale eſt $\frac{\text{Quadrato quadrato}}{4}$ = ſummæ omnium Cuborum. Atqne ita deinceps.

Propoſitio XVII.

Quadrare Hyperbolam.

In diagrammate præcedenti, poſitio $AI=1$; intelligatur aſymptos inde ab I verſus E diviſa in partes æquales innumeras, quæ ſint *v.gr.*

$Ip = pq = qr = a$. Erit, per XIV & XV hujus, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, &c. & $qs = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, &c. & $rs = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, &c. Sed $ps + qs + rs$ = areæ $BIrs$ =

$$= \left\{\begin{array}{l} 1 - a + aa - a^3 + a^4 \\ 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4 \\ 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4 \end{array}\right\} \text{ &c.} =$$
$$= 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4,$$

hoc eſt, = numero terminorum contentorum in linea Ir, minus ſummâ eorundem terminorum, plus ſummâ quadratorum ab iiſdem, minus ſummâ cuborum, plus ſummâ quadrato-quadratorum, &c.

Hinc poſito, ut antè, $IA = 1$; ſed $Ip = 0|1$ = numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIps$ = numero terminorum $= 0|1$, minus ſumma eorundem terminorum $= 0|005$, plus ſumma quadratorum ab iiſdem = $0|000333333$, minus ſumma cuborum = $0|000025$, plus ſumma quadrato-quadratorum = $0|000002$, minus ſumma quadrato cuborum = $0|000000166$, plus ſumma cubo-cuborum = $0|000000014$, &c.

$$+ \left\{\begin{array}{l} 0|1 \\ 0|000333333 \\ 0|000002 \\ 0|000000014 \end{array}\right. \quad \left\| \quad - \left\{\begin{array}{l} 0|005 \\ 0|000025 \\ 0|000000166 \end{array}\right.\right.$$
$$+ \quad 0|100335347 \quad \| \quad - \quad 0|005025166$$
$$- \quad 0|005025166$$
$$+ \quad 0|095310181 \quad = \text{areæ } BIps.$$

Sic poſito $Iq = 0|21$ = numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIqs$ = numero terminorum $= 0|21$, minus ſumma eorundem terminorum $= 0|02205$, plus ſumma quadratorum ab iiſdem = $0|003087$, minus ſumma cuborum = $0|000486202$, plus ſumma quadrato-quadratorum = $0|000081682$, minus ſumma quadrato-cuborum

cuborum = 0|000014294, plus ſumma cubo-cuborum = 0|00002572, minus ſumma quadrato-quadrato-cuborum = 0|000000472 plus ſumma quadrato-cubo-cuborum = 0|000000088.

	0|21		0|02205
	0|003087		0|000486202
+	0|000081682	—	0|000014294
	0|000002572		0|000000472
	0|000000088		0|000000016
	0|000000003		
+	0|213171345	—	0|022550984
—	0|022550984		
+	0|190620361 = areæ *BIqt*.		

Unde apparet, ut ratio *AI* ad *Ap* (1 ad 1⌊1) eſt dimidiata rationis *AI* ad *Aq* (1 ad 1⌊21;) ita aream *BIps* eſſe dimidiam areæ *BIqt*. Cæterum proclive eſt hunc calculum extendere ad quotvis loca, quod mihi tentanti, prodiit area *BIps* = 0⌊09531017980432486004395212 — — 328076509222060534; & area *BIqt* = 0⌊1906203596= =0864972008790424656153018444121072, quam cùm exactè duplam deprehenderem iſtius ſuperioris ſcivi inde me calculum rectè poſuiſſe.

Propoſitio XVIII.

Comparare areolas Hyperbolicas cum ratiunculis abſolutorum æquidifferentium.

In diagrammate præcedenti, poſitâ *AI*=1, & aſymptoto inde ab *I* verſus *E* diviſâ in partes æquales innumeras, quæ ſint *v*, *gr*. *Ip*, *pq*, *qr*: erit areola *BI ps* menſura ratiunculæ, quam *A I* obtinet ad *A p*; & areola 5 *p q t* menſura ratiunculæ, quam *A p* obtinet ad *A q*; & areola *t q r u* menſura ratiunculæ, quam *A q* obtinet *A r*, &c. Atque areolæ iſtæ ſupputantur prorſus eodem modo, quo ſuprà Propoſitione VIII & IX. rationes terminorum æquidifferentium. Id quod paucis indicare, oportunum duxi.

Propositio XIX.

Invenire summam Logarithmorum.

In eodem diagrammate positâ $AI = 1$, & asymptoto inde ab I versus E divisâ in partes æquales innumeras, quæ sint *v. gr.* Ip, pq qr. opportet invenire summam areolarum; $BIps + BIqt + BIru$ (&c.) = summæ Logarithmorum = solido, constanti ex areola $BIps$ perpendiculariter insistente lineæ ps, & areola $BIqt$ perpendiculariter insistente lineæ qt, & areola $BIru$ perpendiculariter insistente lineæ ru, &c. ductis nimirum singulis in unam infinitissimam lineæ datæ.

Constructio hujus Problematis congruit cum constructione propositionis XVII. substituendo nimirum pro numero terminorum, summam eorundem; & pro summa terminorum, summam quadratorum; & pro summa quadratorum, summam cuborum; &c. Sic positâ $AI = 1$, & $Ip = 0\lfloor 1$, oporteat nos invenire summam omnium Logarithmorum inde ab 1 ad $0\lfloor 1$.

$$
\begin{array}{rr|rr}
 & 0|005 & & 0|000166666 \\
+ & 0|000008333 & - & 0|0000005 \\
 & 0|000000033 & & 0|000000002 \\
\hline
+ & 0|005008366 & - & 0|000167168 \\
- & 0|000167168 & & \\
\hline
 & 0|004841198 & & = \text{summæ omnium Log-orum.}
\end{array}
$$

Hinc patet, quomodo productum continuum omnium à 0 ad numerum datum Arithmeticè progredientium inveniri queat. Nam summa Log-orum, est Log-us producti continui.

Patet quoque ex præcedentibus, quo pacto Problema *Mersennianum*, si non Geometricè saltem in numeris, ad quotvis usque locos solvi possit. Atque hic jam filum abrumpere cogor, tantisper dum otium pertexendi reliqua largiatur Deus. *FINIS.*

Sequitur

MICHAELIS ANGELI RICCII

GEOMETRICA Exercitatio.

Præfatio.

ABBATI
STEPHANO GRADIO
Michael Angelus Riccius S. P. D.

SCRIPTIONEM hanc meam argumenti, ut vides, inter Mathematica difficillimi, ſed æquè ad difficiliora quæque Problematum efficienda, & obſcuriora Theorematum cognoſcenda vtiliſſimi, cùm in Geometrico, tùm in Analytico pulvere, ad te mittendam duxi, vir ornatiſſime, STEPHANE GRADI, *quem ego vnum omnium hujus Civitatis plurimi facio, ob egregias animi laudes, præſertim verò propter acre his de rebus exiſtimandi judicium, quotidianis graviſſimarum inter nos diſputationum experimentis mihi perſpectum & cognitum. Lege quæſo illam diligenter, & vbi diù exactiſſimæ tuæ cenſuræ ſubjectam habueris, ecquid reſpondeat ſolitæ tuæ de meis hoc in genere cogitationibus, opinioni, pronuncia. Nam ſi hoc aſſequar, ut tibi cæteriſque Amicis earundem Diſciplinarum intelligentibus probetur, minus erit in poſterum quam ob rem humaniſſimis tuis hortationibus obluctter, cùm autor mihi eſſe perſeverabis edendi alia quæ tecum jampridem communicavi, de præceptis univerſæ Artis analyticæ, geometricâ methodo breviter & expeditè demonſtratis, vnà cum animadverſione erratorum quæ in ipſis tradendis magni nominis Auctores erraſſe deprehendi;*

hendi; *faciliúſq; obtinebis ne diutiùs premam apud me quæcumque de Geometria in genere diſputata & literis conſignatæ incertas propoſitiones redegi*; *& ex his illam præcipuè à* Torricellio, *& à te quoq; tan topere commendatam, quæ integram doctrinam triginta propoſitionum* Archimedis, Lucæ Valerii, *& aliorum, vna complectitur*; *duaſque præterea, quibus totam penè* Jo. Caroli de la Faille *de centro gravitatis partium circuli, & ellipſeos doctrinam* [*juſto volumine ab ipſo explicatam*] *abſolvo. Statui autem pauca aliquot hujus ſcripti exemplaria typis imprimere, quò commodiùs poſſint ad peritos hujuſmodi ſcientiarum Amicos, tùm per* Italiam, *tùm exteras apud gentes pervenire, accenſo potiùs ea in re tuo ſtudio obſecutus, quàm ingenio meo. Neque enim is ego ſum, cui nomen famæ per ambitionem ingerere libeat*; *aut quem non magis indagatæ veritatis cognitio, quàm cognitæ oſtentatio delectet. Interim hunc amicitiæ noſtræ jampridem inſtitutæ, & literario præcipuè commercio nunquam coli intermiſſæ, fructum jucundiſſimum feram, ut quæ hac in re de me ſentis amicè, hoc eſt* [*ut* Euripidi *placet*] *libere, te loquentem audiam*; *eoque, quid cæteri & ſentiant & loquantur, ſecurus fiam. Vale,* Romæ *octavo Idus* Julii 1666.